



TITLE:

FoliationのCharacteristic ClassとR-Extension (C^∞ -写像のトポロジー)

AUTHOR(S):

大和, 健二

CITATION:

大和, 健二. FoliationのCharacteristic ClassとR-Extension (C^∞ -写像のトポロジー). 数理解析研究所講究録 1975, 257: 57-65

ISSUE DATE:

1975-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105774>

RIGHT:

Foliation の Characteristic class と r -extension.

阪大 理 大和健二

多様体 M 上の $\text{codim } p$ foliation (M, \mathcal{F}) が r -extendable ($p > r > 0$) とは M 上の $\text{codim } (p-r)$ foliation $(M, \bar{\mathcal{F}})$ が存在して, \mathcal{F} の各 leaf は $\bar{\mathcal{F}}$ の leaf に含まれる事と定義する.

Y. H. Clifton, J. W. Smith [1] は $r=1$ の時 leaf space に "Euler class" を定義して 1-extendable であるための十分条件を与えようとした.

一三 R. Moussu [2] は ある条件の下で 1-extendable であるための必要条件を exotic characteristic class によって与えた.

ここでは R. Moussu の結果の一般化について考える.

§1. Exotic characteristic classes.

ここでは normal bundle trivial な foliation

の exotic characteristic class の定義を述べる (cf. [3] [4]).

(M, \mathcal{F}) を $\text{codim } p$ C^∞ -foliation とする。

一般の場合に exotic characteristic class

$$\lambda_{\mathcal{F}}^* : H^*(WOp) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{R})$$

を定義するのと同様で まず cochain complex W_p を

$$W_p = \wedge(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_p) \otimes \mathbb{R}[c_1, \dots, c_p] / \{ \deg \varphi \geq p \}$$

$$d\mathfrak{h}_i = c_i, \quad dc_i = 0$$

$$\text{但. } \deg \mathfrak{h}_i = 2i-1, \quad \deg c_i = 2i$$

により 定義し 次に $\nu(\mathcal{F})$ の basic connection ∇' を
1) とする。今 $\nu(\mathcal{F})$ は trivial だから $\nu(\mathcal{F})$ の global
frame $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ によ、て与えられる trivialization
 $t: \nu(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}^p$ がある。この時 $\nu(\mathcal{F})$ 上の metric conn-
ection ∇^0 として $\nabla_x^0 s_i \equiv 0, \forall i=1, \dots, p, \forall x \in \mathcal{X}(M)$
なるものがとれる。それで θ_1, θ_0 を ∇', ∇^0 の connection
form とし Ω_t を $\nu(\mathcal{F})$ 上の connection $t\nabla' + (1-t)\nabla^0$
の curvature form とする。この時 準同型写像

$$\lambda_{(\mathcal{F}, t)} : W_p \longrightarrow A^*(M)$$

$$\text{が } \lambda_{(\mathcal{F}, t)}(c_i) = C_i(\Omega_1, \dots, \Omega_i) \in A^{2i}(M)$$

$$\lambda_{(\mathcal{F}, t)}(\mathfrak{h}_i) = i \int_0^1 C_i(\theta_1 - \theta_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \in A^{2i-1}(M)$$

但. C_i は Chern polynomials

として一般の場合と全く同様に定義できる。その induced map $\lambda_{(\pi, t)}^* : H^*(W_p) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{R})$ の像が normal bundle trivial の場合の exotic characteristic class である。もちろん これは π と t にはみ依存する。

§2. 定理

(M, π) を $\text{codim } p$ C^∞ -foliation とする。

記号. $a > b$ に \bar{x} として 準同型写像

$$f_{a,b} : WO_a \longrightarrow WO_b \quad (\text{又は } W_a \longrightarrow W_b)$$

$$f_{a,b}(c_i) = \begin{cases} c_i, & i \leq b \\ 0, & i > b \end{cases} \quad f_{a,b}(\tilde{c}_i) = \begin{cases} \tilde{c}_i, & i \leq b \\ 0, & i > b \end{cases}$$

なるものとして定義し $O_{p,r} \subset H^*(WO_p)$ (又は $H^*(W_p)$) を

$$O_{p,r} = \text{Im } f_{p+r,p}^* \cap \text{Ker } f_{p,p-r}^*$$

とおく。また $j_p : WO_p \longrightarrow W_p$ は自然な包含写像とする。

定理 A.

(M, π) が C^∞ -foliation に 1-extendable

$\square \Rightarrow \forall \omega \in O_{p,1} \subset H^*(WO_p)$ に \bar{x} として

$$\lambda_{\pi}^*(\omega) = 0 \in H^*(M; \mathbb{R})$$

定理 B. $\nu(\pi)$ が trivial の時,

(M, π) が normal bundle trivial な C^∞ -foliation

は r -extendable

$$\Rightarrow \forall \omega \in O_{p,r} \cap \text{Im } j_p^* \subset H^*(W_p) \text{ に対して}$$

$$\lambda_{(\bar{\pi}, t)}^*(\omega) = 0 \in H^*(M; \mathbb{R}).$$

==> $t: D(\bar{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}^p$ は trivialization.

注意 1. 次の事はすぐ判る。

$$[a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_n} \otimes c_{i_1} \dots c_{i_m}] \in O_{p,r}$$

$$\Leftrightarrow (1) \forall j_n \quad j_n + i_1 + \dots + i_m > p+r$$

$$\text{かつ (2)} \exists j_n \quad j_n > p-r \text{ 又は } i_1 + \dots + i_m > p-r$$

また $O_{p,r}$ は 上の様な cohomology class で生成される。

注意 2. 定理 B で $(M, \bar{\pi})$ が $(M, \bar{\pi})$ に r -extendable したとし さらに $D(\bar{\pi})$ の trivialization $\bar{t}: D(\bar{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}^{p-r}$ が $\bar{t} = t|_{D(\bar{\pi})}$ なるようにとれると仮定すれば $\forall \omega \in O_{p,r}$ に対して $\lambda_{(\bar{\pi}, t)}^*(\omega) = 0$ が判る。これが $r=1$ の場合に R. Moussu の結果を言っている。

また 上の時 generalized Godbillon-Vey class $\omega = [a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p \otimes c^p] \in H^*(W_p)$ について $\omega \notin O_{p,r}$ だけど $\lambda_{(\bar{\pi}, t)}^*(\omega) = 0$ は判る。

§3. 定理の証明.

定理 A も B も 証明は同様であるので 定理 B を示す。

今 $\text{codim } p$ C^m -foliation (M, \mathcal{F}) が C^m -foliation $(M, \bar{\mathcal{F}})$ に r -extendable であるとし $t: \nu(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $\bar{t}: \nu(\bar{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbb{R}^{p-r}$ を各々の trivialization とする。

(I) $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\bar{\mathcal{F}}) \oplus \tilde{\nu}$ とかける。

∇^0 (resp. $\bar{\nabla}^0$) を \mathbb{R}^1 におけるように trivialization t (resp. \bar{t}) によつて一意に決まる $\nu(\mathcal{F})$ (resp. $\nu(\bar{\mathcal{F}})$) 上の metric connection とする。 $\tilde{\nabla}^0$ を $\tilde{\nu}$ 上の metric connection とすれば $\nu(\mathcal{F})$ 上に $\nabla^{0'} = \bar{\nabla}^0 \oplus \tilde{\nabla}^0$ なるものとしての metric connection が定義される。

また, $\bar{\nabla}^1$ を $\nu(\bar{\mathcal{F}})$ 上の basic connection とする時 (M, \mathcal{F}) が $(M, \bar{\mathcal{F}})$ に r -extendable である事より $\nu(\mathcal{F})$ 上の basic connection ∇^1 として

$$(i) \nabla_x^1 \Upsilon - \bar{\nabla}_x^1 \Upsilon \in \Gamma(\tilde{\nu}), \quad x \in \mathfrak{X}(M), \quad \Upsilon \in \Gamma(\nu(\bar{\mathcal{F}}))$$

$$(ii) \nabla_x^1 \Upsilon \in \Gamma(\tilde{\nu}), \quad x \in \mathfrak{X}(M), \quad \Upsilon \in \Gamma(\tilde{\nu})$$

をみたすものがとれる。(ii)より $\tilde{\nu}$ 上の connection が得られる それを $\tilde{\nabla}^1$ とかく。

今 $\nu(\mathcal{F})$ の local frame $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_p\}$ を $\{s_1, \dots, s_{p-r}\}$ は $\nu(\bar{\mathcal{F}})$ の, $\{s_{p-r+1}, \dots, s_p\}$ は $\tilde{\nu}$ の local frame であるようにとる。これによつて表わされる上の connections の connection form を順に $\theta_0, \bar{\theta}_0, \tilde{\theta}_0, \theta'_0, \bar{\theta}_1, \theta_1, \tilde{\theta}_1$ とかけば次が成立す

る。

$$(3.1) \quad \theta'_0 = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\theta}_0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\theta}_0 \end{array} \right) \quad \theta_1 = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\theta}_1 & * \\ \hline 0 & \tilde{\theta}_1 \end{array} \right)$$

(注) 定理Bの注意2のように $\bar{t} = t|_{\nu(\bar{\tau})}$ なる条件があれば $\nabla^0 = \nabla^{0'}$ と出来て $\theta_0 = \theta'_0$ となる。

(II) $\omega \in W_p$ (resp. W_{p-r}) に対して $\lambda_{(\bar{\tau}, t)}(\omega)$ (resp. $\lambda_{(\bar{\tau}, \bar{t})}(\omega)$) を $\omega(\bar{\tau})$ (resp. $\omega(\bar{\tau})$) と書く。また, Ω'_t を $\nu(\bar{\tau})$ 上の connection $t\nabla' + (1-t)\nabla^{0'}$ の curvature form とし

$$h'_i(\bar{\tau}) = i \int_0^1 C_i(\theta_1 - \theta'_0, \Omega'_t, \dots, \Omega'_t) dt$$

とおく。但、 C_i は Chern polynomial である。

$$\frac{d}{dt} C_i(\Omega'_t, \dots, \Omega'_t) = d(i \cdot C_i(\theta_1 - \theta'_0, \Omega'_t, \dots, \Omega'_t))$$

に注意して (3-1)より 計算すれば 次を得る。

補題 (3.2). $\tilde{\Omega}_1 \in \tilde{\nabla}'$ の curvature form とすれば

$$(1) \quad C_i(\bar{\tau}) = \sum_{j+h=i} C_j(\bar{\tau}) \wedge C_h(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1), \quad i=1, \dots, p.$$

(2) $i > r$ の時

$$h'_i(\bar{\tau}) = \sum_{j+h=i} h'_j(\bar{\tau}) \wedge C_h(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1) + dV_i$$

但 $\equiv \equiv$ で $C_0(-) = 1$, $j > p-r$ の時 $C_j(\bar{\tau}) = h'_j(\bar{\tau}) = 0$, $i > r$ の時 $C_h(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1) = 0$ とする。

(注) (I) の注と同じく $\bar{t} = t|_{\nu(\bar{\tau})}$ ならば 微分形式として $h'_j(\bar{\tau}) = h_j(\bar{\tau})$ である。

(III) $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq p$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq p$ として
 $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ とおき

$$|I| = i_1 + \dots + i_m$$

$$u_J \cdot c_I = u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_n} \otimes c_{i_1} \dots c_{i_m} \in W_p$$

とする。また

$$u'_J(\bar{c}) = u'_{j_1}(\bar{c}) \wedge \dots \wedge u'_{j_n}(\bar{c})$$

とおく。 §2 注意1を見れば 次の補題より 定理B を得る。

補題 (3.3) J, I は 上の通りとする。

$$(1) [u_J \cdot c_I] \in \text{Im } d_p^* \subset H^*(W_p)$$

$$\Rightarrow u'_J(\bar{c}) \wedge c_I(\bar{c}) = (u_J \cdot c_I)(\bar{c}) + \text{exact}$$

$$(2) j_1 + |I| > p+r$$

$$\Rightarrow u'_J(\bar{c}) \wedge c_I(\bar{c}) = (u_J \cdot c_I)(\bar{c}) + \text{exact}$$

こゝで、もちろん、 $|I| > p-r$ 又は $\exists j_n > p-r$ 存す

$$\text{ば } (u_J \cdot c_I)(\bar{c}) = 0$$

(3-3) の証明.

(1) はよく知られてゐる。(2) を示す。

仮定より, $P_{\text{out}}^*(\tilde{\beta}) = 0$ ($* > 0$) 従つて

$$c_k(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_1) = d\tilde{u}_k, \exists \tilde{u}_k \in A^{2k-1}(M)$$

また $d u_k(\bar{c}) = c_k(\bar{c})$ である。これより (3.2)

(2) は $j > r$ の時

(*) $\hat{h}_j'(\bar{\tau}) = \hat{h}_j(\bar{\tau}) + \sum_{\substack{i+k=j \\ 0 < k \leq r}} C_i(\bar{\tau}) \wedge \hat{h}_k + \text{exact}$
と書ける。

今 $j_1 + |I| > p+r$ だから $\forall j_k > r$ (1)より。 (*)より

1) $j_1 + |I| > p+r$ に注意して Bott's vanishing theorem を使えば

(**) $\hat{h}_j'(\bar{\tau}) \wedge C_I(\bar{\tau}) = \hat{h}_j(\bar{\tau}) \wedge C_I(\bar{\tau}) + \text{exact}$
を得る。

次に (3.2) (1) を

$$C_i(\bar{\tau}) = C_i(\bar{\tau}) + e_{i1} + \dots + e_{ir}$$

$$\begin{aligned} e_{ik} &= C_{i-k}(\bar{\tau}) \wedge C_k(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_r) \\ &= C_{i-k}(\bar{\tau}) \wedge d\hat{h}_k \end{aligned}$$

とみて 再び $j_1 + |I| > p+r$ に注意して Bott's vanishing theorem を使えば

(***) $\hat{h}_j(\bar{\tau}) \wedge C_I(\bar{\tau}) = (\hat{h}_j C_I)(\bar{\tau}) + \text{exact}$
を得る。 従って (**) と合すれば (2) を得る。 (証明終)

また 上の証明を見れば (II) の注より 条件 $\tau = \tau|_{U(\tau)}$ の下では 各 2 注意 2 の前半が得られる事は明らかである。

References.

[1] T.H. Clifton and J.W. Smith: The euler

class as an obstruction in the theory of foliations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963) 949 - 954.

[2] R. Moussu: Sur les classes exotiques des feuilletages. Lecture Notes in Math. 392 Springer - Verlag.

[3] R. Bott: Lectures on Characteristic Classes and Foliations. Lecture Notes in Math 279 Springer - Verlag.

[4] A. Haefliger: Sur les classes caractéristiques des feuilletages. Séminaire BOURBAKI 24^e année 1971/72. n° 412.